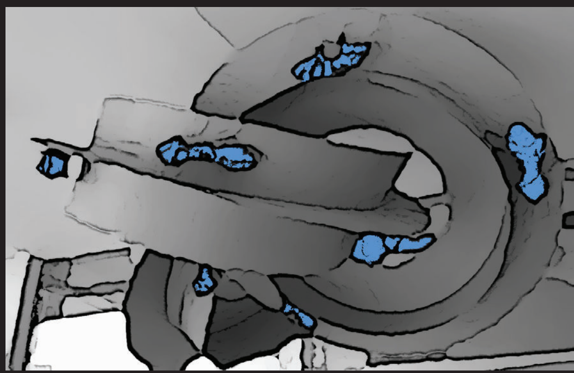


Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de la Matemática y Educación Matemática

2012

Editores:

David Arnau

José Luis Lupiáñez

Alexander Maz

ISBN: 978-84-695-6765-4

Departament de Didàctica de la Matemàtica

Universitat de València

Arnau, D., Lupiáñez, J. L., y Maz, A. (Eds.). (2012). *Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de la Matemática y Educación Matemática - 2012*. Valencia: Departamento de Didáctica de la Matemática de Universitat de Valencia y SEIEM.

Editores:
David Arnau
José Luis Lupiáñez
Alexander Maz

Edita:
Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM)
Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universitat de València

Valencia, 2012.

ISBN: 978-84-695-6765-4

ÍNDICE

EL APRENDIZAJE DE ALGUNOS ASPECTOS DEL SISTEMA DE NUMERACIÓN DECIMAL A TRAVÉS DE PROBLEMAS ARITMÉTICOS VERBALES AL INICIO DE EDUCACIÓN PRIMARIA

Mónica Ramírez y Carlos de Castro

Universidad Complutense de Madrid

Resumen

En este trabajo se narra la experiencia de un taller de resolución de problemas con niños de 6 y 7 años, pertenecientes a dos aulas de primero de Educación Primaria. La resolución de problemas favorece la comprensión de las relaciones que se dan en las cantidades involucradas en las operaciones aritméticas. Uno de los contenidos matemáticos que se introduce en el primer ciclo de Educación Primaria es el sistema de numeración decimal. Este trabajo se basa en la instrucción guiada cognitivamente de resolución de problemas para introducir algunos aspectos del sistema numérico decimal en el primer curso de Educación Primaria, y se ve reflejado las primeras estrategias basadas en el manejo de grupos de diez utilizando problemas de estructura multiplicativa.

Palabras clave: Instrucción Guiada Cognitivamente (CGI), Problemas Aritméticos Verbales, Sistema de Numeración Decimal, Educación Primaria, Investigación de diseño.

Abstract

This paper narrates the experience of a workshop on problem solving with children aged 6 and 7, from two classrooms of primary school first. Problem solving promotes understanding of the relationships that exist in the quantities involved in arithmetic operations. One of the mathematical content is introduced in the first cycle of primary education is the decimal number system. This work is based on the Cognitively Guided Instruction on problem solving to introduce some aspects of the decimal number system in the first year of primary education, and reflected the first strategies based on managing groups of ten using multiplicative structure problems.

Keywords: *Cognitively Guided Instruction (CGI), Verbal Arithmetic Problems, Decimal Number System, Primary Education, Design Research.*

El modelo teórico de Instrucción Guiada Cognitivamente (CGI) (Carpenter, Fennema, Franke, Levi y Empson, 1999) pone de manifiesto que no es necesario enseñar una estrategia de resolución para un determinado tipo de problema, sino que en una ambiente en el que se estimule a los niños a desarrollar sus propias estrategias, son capaces de representar las acciones y relaciones que ocurren entre las cantidades de los problemas, encontrando procedimientos de resolución con sentido para ellos. Los problemas aritméticos se clasifican según las acciones y relaciones que se describen en su enunciado. Los problemas aditivos se clasifican en problemas de cambio creciente,

Ramírez, M., y De Castro, C. (2012). El aprendizaje de algunos aspectos del sistema de numeración decimal a través de problemas aritméticos verbales al inicio de educación primaria. En D. Arnau, J. L. Lupiáñez, y A. Maz (Eds.), *Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de la Matemática y Educación Matemática - 2012* (pp. 97-109). Valencia: Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universitat de València y SEIEM.

cambio decreciente, combinación y comparación (Carpenter y otros, 1999). Otros autores incluyen los problemas de igualación (Puig y Cerdán, 1995; Rodríguez, Lago, Caballero, Dopico, Jiménez, 2008). Por otro lado, tenemos los problemas de estructura multiplicativa, entre los cuales hay problemas asimétricos, como los de grupos iguales, los de razón, precio, y los de comparación multiplicativa. Como problemas multiplicativos simétricos están los problemas de matrices, de producto de medidas y de combinaciones (Carpenter y otros, 1999).

Desde el modelo CGI se plantea un enfoque innovador para el aprendizaje de algunos aspectos del sistema de numeración decimal, como el valor posicional de las cifras de los números de dos cifras o las equivalencias y conversiones entre decenas y unidades, partiendo de problemas aritméticos verbales. Estos problemas pueden ser de dos etapas, con una primera etapa de estructura multiplicativa, de multiplicación con grupos de diez, y una segunda etapa de estructura aditiva, de combinación, y problemas de división agrupamiento con resto (también con grupos de 10). En el primer caso, serán problemas en los que hay que pasar de las decenas y unidades de un número al número, dentro del contexto de un problema. En el segundo caso, habrá que pasar del número a sus decenas y unidades, también a través de una situación contextualizada en un problema.

Las estrategias que desarrollan los niños ante estos problemas comienzan por la modelización directa de las cantidades, las relaciones y acciones descritas en los enunciados. Estas estrategias van evolucionando hacia estrategias de conteo hasta que los niños comienzan a utilizar hechos numéricos básicos y derivados. Se puede observar que los niños inicialmente utilizan una *modelización directa* para resolver los problemas multiplicativos que consiste en una *estrategia de agrupamiento,* formando los grupos de 10 que indica el problema y juntando los objetos de estos grupos con las unidades sueltas. Para concluir realizan un conteo uno a uno de todos los objetos reunidos. Si se proporciona materiales estructurados como lo bloque de base 10, pueden empezar a utilizar las barras para modelizar los grupos de 10, aunque para realizar el recuento final cuentan de una en una cada una de las unidades de la barra (Carpenter y otros, 1999; Caballero, 2005; Rodríguez, Lago, Caballero, Dopico, y Jiménez, 2008). Poco a poco, empiezan a *contar decenas*, es decir, representan las decenas como el paso anterior, y al contar el total de elementos cuentan de 10 en 10 señalando cada una de las decenas. Los niños dicen, 10, 20, 30 (señalando cada decena), 31, 32, 33, 34. Hay un momento en el que no necesitan representar las decenas, sino que mentalmente van contando de 10 en 10 el número de decenas que tiene el enunciado. Harían 10, 20, 30 (3 cajas), 31, 32, 33, 34. Finalmente, *utilizan el valor posicional***,** tomando como decenas el número de grupos de 10 y como unidades, las unidades sueltas. Los niños dirían, si son 3 cajas de 10, son 3 decenas y 4 unidades, 34.

En problemas de división medida, la *modelización directa* puede realizarse a través de la *estrategia de medida*, que consiste en ir formando grupos de 10 hasta alcanzar el valor del dividendo. Hay dos variantes de esta estrategia: Se puede representar inicialmente el número total de elementos, del que se van quitando elementos para formar grupos de 10, o también ir formando grupos de 10 sin haber previamente representado la cantidad total de elementos. En la resolución de problemas con resto, es necesario tener en cuenta qué sentido va a tener el resto en el problema. El contexto del problema suele indicar el trato que debemos dar al resto en la respuesta a la cuestión que se nos formula. Hay veces que se incluye un grupo más, que se desprecia el resto, que el resto es la solución o incluso se fracciona el resto para que no quede nada (Carpenter, 1999). La resolución de problemas realistas (Jiménez, 2008) incluye los problemas de división con resto como problemas que se plantean habitualmente en la vida cotidiana, con más frecuencia que los problemas de división con resto cero.

Investigación de diseño

La investigación de diseño es un paradigma metodológico de naturaleza cualitativa que se está aplicando y desarrollando en la investigación educativa, en concreto, en la Didáctica de las Matemáticas (Molina, 2006; Molina, Castro, Molina, y Castro, 2011). Promueve el diseño de innovaciones curriculares basadas en teorías que, a través de un ciclo de diseño, implementación, análisis y rediseño, trata de explicar cómo funcionan los diseños en situaciones reales, mejorarlos, y desarrollar las teorías que sustentan la innovación y que orientan el diseño (Núñez, de Castro, del Pozo y Pastor, 2010). Se ha diseñado el taller de resolución de problemas que consta de 25 sesiones, una por semana, fundamentado en estudios previos sobre resolución de problemas aritméticos verbales (Carpenter y otros, 1999; Puig y Cerdán, 1995) y se ha llevado a la práctica. En el momento de escribir este trabajo, nos encontramos en la fase de análisis retrospectivo posterior a la implementación del taller.

Objetivos de la investigación

El presente trabajo es una investigación basada en diseño, orientada al desarrollo del currículo, cuyo objetivo principal es el diseño un producto curricular, un taller de resolución de problemas aritméticos, para primer curso de Educación Primaria. Partiendo del modelo teórico CGI (Carpenter y otros, 1999), se persigue que los estudiantes desarrollen su *competencia matemática*, según plantea el marco de PISA 2003 (OCDE, 2004) que defiende "un concepto de competencia matemática vinculado a la capacidad de los alumnos de analizar, razonar y comunicarse eficazmente cuando formulan, resuelven e interpretan problemas matemáticos en diversas situaciones, incluyendo conceptos matemáticos cuantitativos" (pp. 37). Pensamos que este planteamiento sobre las competencias es perfectamente compatible con las competencias básicas del currículo actual de Educación Primaria (MEC, 2007).

Los objetivos del taller, además de los propios de la enseñanza enfoque cognitivo, son la agilización del cálculo mental (sustitución de la modelización directa por conteo y uso de hechos numéricos) y el conocimiento del sistema de numeración decimal, y especialmente en el valor posicional de las cifras de los números, que es en el punto en que nos centramos en el presente trabajo.

Método

Participantes

En la investigación, han participado 54 alumnos de dos grupos (con 28 y 26 alumnos) de primer curso de Educación Primaria, del CEIP Virgen de Peña Sacra, colegio público de la localidad de Manzanares el Real (Madrid).

Taller de resolución de problemas en Primer curso de Educación Primaria

El taller de resolución de problemas está basado en el modelo CGI (Carpenter y otros, 1999). Sobre la forma de trabajo de la CGI, introducimos una variante principal: los problemas son planteados por carta, por una persona externa al aula, a la que hay que dar la solución a la vuelta de correo. Esta forma de trabajo persigue que, tras el esfuerzo personal individual por resolver el problema, los alumnos deban explicar su solución, argumentar por qué es la mejor, y debatir entre ellos para decidir qué solución (única de la clase) transmiten a la persona que les ha planteado el problema. Esta variante en el trabajo con problemas ha sido ensayada en Educación Infantil, con el objetivo de incorporar decididamente las competencias de comunicación y argumentación al trabajo matemático (De Castro y Escorial, 2007; De Castro, Pastor, Pina, Rojas y Escorial, 2009; De Castro, Walsh, Del Coso, Salvador, González y Escorial, 2009; Núñez, De Castro, Del Pozo, Mendoza y Pastor, 2010). Por otra parte, que los enunciados estén basados en cuentos que previamente se utilizan en el aula, tiene el objetivo de favorecer la comprensión de, y la posibilidad de modelizar, los propios enunciados.

Esta experiencia está incluida dentro de un proyecto mayor, que abarca todo el curso escolar con un total de 24 sesiones, una sesión por semana y cada sesión con una duración entre 45 minutos y una hora y cuarto. Cada taller se desarrolla siguiendo las siguientes etapas:

1. Lectura del cuento. Previamente a cada sesión, se debe leer dos o tres veces el cuento en el que está basado el enunciado del problema correspondiente a la sesión.

2. Lectura de la carta. La sesión comienza con la lectura de una carta en la que alguien conocido y apreciado por los niños (en este caso, Clara, la maestra en prácticas que compartió parte importante del curso anterior con ellos) pide ayuda para resolver un problema relacionado con el cuento que se ha leído.

3. Trabajo individual. Cada niño tiene que intentar resolver el problema utilizando la estrategia y los materiales que considere adecuado. Si acaban pronto, se les recomendará que prueben a hacerlo con algún otro material, que lo hagan con un dibujo o que ayuden a algún compañero (sólo si la ayuda es solicitada).

4. Puesta en común y consenso sobre resultado y estrategia. En esta parte debe enfatizarse, por parte del profesor, lo que es una explicación válida y lo que no. No vale, por ejemplo, decir que la solución es 5 'porque lo he pensado' y cosas de este tipo. Es un momento en que destaca el trabajo de las competencias de comunicación y argumentación.

5. Escritura de la carta de respuesta. Dado que el problema está planteado en un contexto de comunicación, en la que se ha recibido una carta, se debe contestar a la carta como final del taller.

Los alumnos de este centro ya han trabajado los talleres de resolución de problemas en Educación Infantil (De Castro, Pastor, Pina, Rojas y Escorial, 2009; De Castro, Walsh, Del Coso, Salvador, González y Escorial, 2009; Núñez, De Castro, Del Pozo, Mendoza y Pastor, 2010) y están habituados a trabajar con materiales como la banda numérica, la tabla 100, cubos encajables, plastilina, o cualquier tipo de material que les sirva para representar los enunciados. Como el objetivo es empezar a trabajar las unidades y decenas, se incluyen, entre los materiales, bloques de base 10, sólo con unidades y decenas. La Tabla 1 muestra las sesiones 7, 8, 8b, 11, 12 y 15 con problemas de dos etapas (multiplicación y combinación) y de división agrupamiento con resto (con grupos de 10).

Procedimiento

Hemos recogido grabaciones de video de las sesiones, así como hojas de registro en las que anotamos los materiales empleados por los niños, descripciones de los procedimientos utilizados, y los comentarios que hacen los niños al explicarnos cómo han resuelto el problema. También hemos recogido las hojas de trabajo y realizado fotos, de momentos clave del proceso de resolución de los problemas, durante las sesiones, para su posterior análisis.

Sesión	Problema	Tipo	Cuento
7	Si tenemos 2 cajas llenas de patitos, con 10 patitos en cada caja, y 3 patitos sueltos, ¿Cuántos patitos tenemos en total?	Multiplicación +combinación	Carle (2011)
8	Si hay 26 patitos de goma, y en cada caja caben 10 patitos, ¿Cuántas cajas podemos llenar? ¿Cuántos patitos quedan sin guardar?	División medida	Carle (2011)
8b	Si hay 34 patitos, y en cada caja caben 10 patitos. ¿Cuántas cajas podemos llenar? ¿Y cuántos patitos quedan sin guardar?	División medida	Carle (2011)
11	Si tenemos 37 huevos, ¿cuántas cajas de 10 huevos podemos llenar y cuántos huevos sobran?	División medida	Bruno (2003)
12	Si tenemos 4 decenas de huevos y 5 huevos más, ¿cuántos huevos tenemos en total?	Multiplicación +combinación	Bruno (2003)
15	Cuando había 65 pingüinos, los guardaron poniendo 10 en cada caja. ¿Cuántas cajas llenaron y cuántos pingüinos sobraron?	División medida	Fromental (2007)

Tabla 1. *Problemas de multiplicación y división con grupos de 10*

Resultados

Durante las seis primeras sesiones del taller (ver Apéndice II), al inicio del curso, las estrategias de los niños eran fundamentalmente de modelización directa y conteo. En la quinta semana del proyecto, se introdujo el concepto de decena en las clases ordinarias, donde la decena se enseña como un grupo compuesto por diez unidades, y se propone a los niños el uso de los bloques de base diez, con unidades (cubitos) y decenas (barras). Por otro lado, y de manera complementaria, en los talleres se añaden diferentes materiales con agrupaciones de 10. Por ejemplo, en la Figura 1 vemos una modelización del problema de la sesión 11 utilizando bloques de base 10 y cajas de decenas de huevos. Estos materiales van siendo integrados poco a poco por los alumnos en el taller. Así, aunque en el problema de la sesión 5 aparece el número 18, ninguno de los alumnos lo representó como 1 decena y 8 unidades, sino como un conjunto de 18 unidades. En la sesión 6, siguen sin emplear las decenas, y utilizando estrategias de modelización directa y conteo. A continuación, describimos estrategias empleadas por los niños en las sesiones indicadas en la Tabla 1 (a partir de la séptima).

Figura 1. Modelización con multibase y hueveras del problema de la sesión 11.

Irene resuelve el problema de la sesión 7 (ver Tabla 1) dibujando redondeles. Cuando lleva 10 redondeles, los encierra en una línea. Luego hace otros 10 redondeles y debajo dibuja otros tres. En la Figura 2, vemos como Irene cuenta uno a uno todos las redondeles (que representan los patitos del enunciado) previamente dibujados. Irene ha utilizado la modelización directa con una estrategia de agrupamiento, y la estrategia de "juntar todos" para el problema de combinación (contando las 20 redondeles provenientes de los dos grupos y diez y los 3 redondeles que representan los patitos sobrantes).

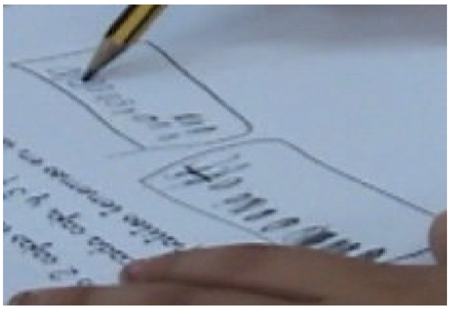


Figura 2. Modelización directa, estrategia de agrupamiento.

En la Figura 3, Juan Daniel representa las dos cajas con dos barras de 10 y los 3 patitos sueltos con cubitos. Para saber el total de elementos, utiliza la modelización con bloques de base diez, y cuenta de una en una cada una de las unidades de las dos barras (y los tres cubos sueltos) para saber cuántas tiene en total.

Figura 3. Modelización con multibase, con conteo uno a uno.

Pablo utiliza también dos barras y 3 unidades de los bloques de base 10 y dice: "Aquí hay 10 y aquí otros 10, 20 y 3 más 23". Por tanto, Pablo también modeliza el problema con los bloques de base diez, pero después utiliza hechos numéricos para determinar la solución. Ismael, sin usar ningún material, dice: "Diez y diez, veinte; y tres, veintitrés". Merche, Nuria y Mónica (la investigadora) mantienen la siguiente conversación sobre el problema de la sesión 12, en la que se plantea cuántos huevos hay en 4 decenas y 5 huevos sueltos.

Merche: Yo voy a poner "Merche" [para "firmar" en la hoja de trabajo] y voy a escribir la carta, porque ya sé cuánto es.
Nuria: Pero… ¿Y si te equivocas? Mejor que lo hagas primero, por si te equivocas.
Inv.: Merche. ¿Ya lo sabes?
Merche: ¡Sí!
Inv.: [Pregunta para comprobar si Merche, al escribir 45 como solución, comprende el significado de cada cifra] ¿Cuántas cajas se llenan?
Merche: [Mira el folio donde está escrito el enunciado, en vez de su solución] Cuatro.
Inv.: ¿Y cuántos quedan?

Merche: [Enseña una mano con los cinco dedos abiertos. Mira el papel y, señalando el 45]: Cuatro, que son cajitas, y cinco unidades.

Cuando sale a la pizarra a explicarlo (Figura 4), escribe el número 45 en grande marcando que 4 son decenas y 5 unidades y por lo tanto, “Son 4 decenas, 4 cajas, y sobran 5”. Merche utiliza la estrategia de utilizar el conocimiento del valor posicional de las cifras. El uso de esta estrategia es el que los diseñadores del taller nos planteamos como “estrategia óptima” y objetivo fundamental del taller para primer curso de Educación Primaria. En las clases ordinarias, los alumnos estudian el valor posicional, pero sólo lo emplean en el taller cuando lo van comprendiendo.

Figura 4. Utilizar el valor posicional en un problema de división medida.

Nuria coge centicubos y forma una barra con 45 de ellos. Después dice: “He puesto 45 y he contado 10”. Luego, cuenta 10 centicubos y los quita de la barra y sigue así, sucesivamente, hasta ya no puede formar más barras con 10 cubos (Figura 5, a la derecha). Cuando termina, cuenta las que sobran y dice: “Quedan cinco”. Se trata de una estrategia de medida en la que, además, se hace una correcta interpretación del resto de la división.

Figura 5. Modelización directa, estrategia de agrupamiento con centicubos.

Amaya dibuja 45 redondeles. A continuación, va tachando 10 y dibuja una caja con 10 redondeles menores. Después, tacha otras 10 y dibuja otra caja de 10. Cuando sólo le quedan 5 bolitas escribe: “4 cajas y sobran 5” (Figura 6). La estrategia es igual que la del ejemplo anterior, con la diferencia de que, en este caso, se utiliza el dibujo en vez de un material manipulativo.

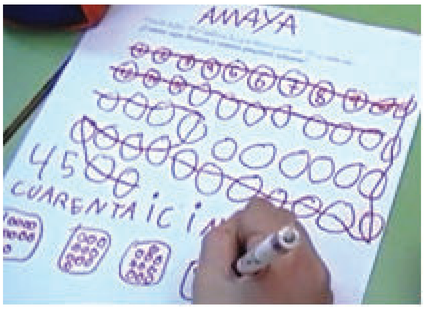


Figura 6. Modelización directa, estrategia de agrupamiento con dibujo.

En el siguiente problema, en que se debe descomponer 45 en decenas y unidades, Lucía utiliza una estrategia de reparto en la que prueba a distribuir 45 pingüinos en 6 grupos.

Lucía: Había hecho muchos grupos y no me quedaban, no me sobraban y he tachado éstos.
Inv.: ¿Y cuál es la solución?
Lucía: Se pueden llenar sólo 4 grupos de 10 y luego me sobran 5.
Inv.: ¿Y cómo lo has hecho?
Lucía: Primero he ido poniendo un pingüino en cada caja, luego dos…
Inv.: ¿Cómo te has dado cuenta de que sobraban cajas?
Lucía: Porque las he contado y, como no me coincidían para que hubiera 10 en cada caja, pues he tenido que quitar para que me salieran 10 en cada caja y me han sobrado 5.

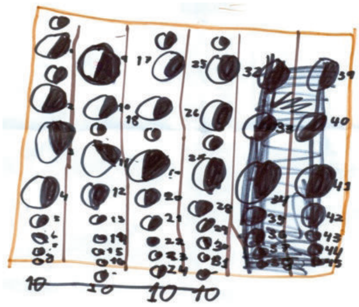


Figura 7. Ensayo y error, repartiendo.

En problemas de división medida con resto, se dio el caso de alumnos que introducían un grupo de más para dar cuenta del resto. La Figura 8 muestra como Yolanda considera que se necesitan 3 cajas para guardar 26 patitos, cuando el enunciado establece que las cajas deben estar llenas y se pregunta por los patos que quedan sin guardar.

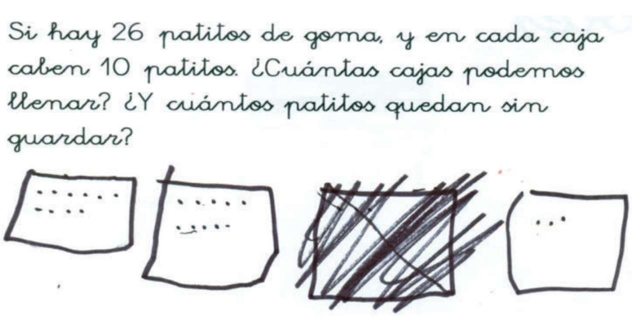


Figura 8. División con resto incluyendo un grupo más.

En la Tabla 2 se recogen los porcentajes de utilización de las estrategias que hemos descrito en los párrafos anteriores, correspondientes a dos sesiones separadas por 2 meses, para resolver dos problemas similares dos etapas (de multiplicación y combinación). Los números entre paréntesis indican los alumnos que, al utilizar la estrategia señalada, necesitaron ayuda de la tutora o algún compañero para resolver correctamente el problema. Como se puede observar, el porcentaje de la estrategias más evolucionada, que es utilizar el valor posicional de las cifras del número, va incrementándose desde un 0% en la primera sesión, hasta un 25,8% en la segunda.

En general, las estrategias que utilizan los niños para explicar la resolución de problemas de multiplicación es la modelización directa, realizando grupos de 10 y juntándolo con las unidades y para los problemas de división medida es la modelización directa utilizando la estrategia de medida en la que representan inicialmente el dividendo. Estas estrategias se basan en la modelización de grupos de 10, una de las características del sistema de numeración. Juntar decenas y unidades respeta el carácter aditivo. Los niños tienden a utilizar estrategias de modelización directa para poder comunicar mejor su solución y se observa que el tener que comunicar las estrategias a sus compañeros y por escrito les obliga a reflexionar sobre ellas.

Estrategias	**Sesión 7**		**Sesión 12**	
	Nº alumnos	**%**	**Nº alumnos**	**%**
Modelización directa, (agrupamiento y juntar todo), contando de uno en uno	20 (5)	37%	8	14,8%
Modelización directa(agrupamiento y juntar todo), contando de 10 en 10	11 (4)	20,3%	4	7,4%
Modelización utilizando bloques de base 10 y contando de 1 en 1	1 (1)	1,9%	2	3,7%
Modelización utilizando bloques de base 10 y contando de 10 en 10	3 (1)	5,5%	1	1,9%
Modelización directa con reparto de las unidades	1	1,9%	0	0
Conteo de 10 en 10	6 (1)	11%	2	3,7%
Usar el valor posicional	0	0%	14 (1)	25,8%
Estrategias erróneas	1	1,9%	11	20,3%
No resuelve	3	5,5%	10	18,5%
No asistencia al taller	9	16,5%	2	3,7%

Tabla 2. *Número de alumnos y porcentaje de las estrategias utilizadas por los niños en dos problemas de multiplicación en dos sesiones separadas por dos meses*

Entre las estrategias erróneas ponemos el ejemplo de la sesión 12, en que varios alumnos trataron decenas y unidades como si ambas fuesen unidades, empleando estrategias de juntar todos, contar a partir del primero o el uso de hechos numéricos (5+4 = 9), quizás influenciados por la sesión anterior, en que se planteaba un problema de combinación.

Eloy: [Leyendo el enunciado] Si hay 4 cajas de huevos, y 5 huevos más, ¿cuántos huevos hay en total? Son nueve.

Sara: ¡No! [Alargando la o].

Eloy: ¡Sí! [Alargando la i]. Mira. Cuatro [Muestra 4 dedos en una mano] y cinco [con la otra mano]. ¿Cuántos son? Nueve.

Sara: ¡No son 9! ¡Que son 4 decenas!

Figura 9. Eloy propone sumar unidades con grupos de 10.

Eloy piensa durante un momento y sostiene que hay 40. Después, con la ayuda de Sara, se da cuenta de su error. Algunos otros alumnos no lo advirtieron hasta la puesta en común. Algunas de las dificultades observadas en este problema son la confusión con datos del problema cuando se dan decenas y unidades, como ocurre en el último ejemplo, confusión al comunicar el resultado por escrito y confusión de las decenas con unidades. En vez de decir 2 decenas o 20 unidades, dicen 20 decenas. En la Figura 10, tenemos la solución del problema de la sesión 8, dada por uno de los alumnos. La solución es correcta, pero aparece escrito “20 cajas” en lugar de “2 cajas”. Posiblemente, este error tenga su origen en las descomposiciones que se hacen en la clase ordinaria (26 = 20 + 6), y muestra que el proceso de comprender correctamente el sistema de numeración decimal está todavía en curso.

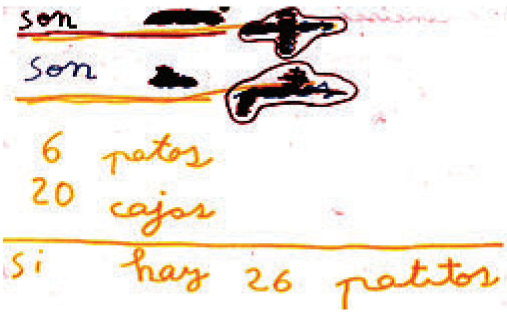
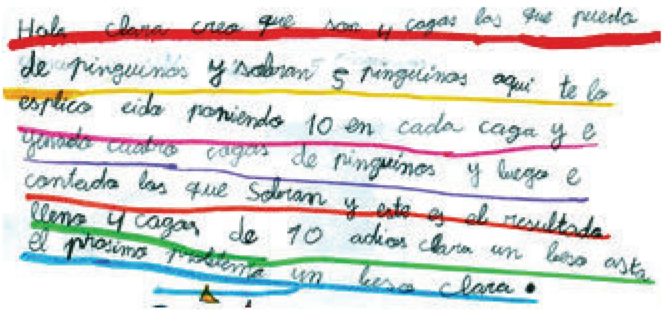


Figura 10. Confusión entre decenas y unidades.

La parte final del taller consiste en la puesta en común de las estrategias y la elaboración de cartas, por grupos de alumnos, para indicar la solución y explicar la estrategia de resolución a la persona que les ha planteado el problema (Clara). En la Figura 11, mostramos un ejemplo de carta.



Hola clara creo que son 4 cagas las que puedo de pinguinos y sobran 5 pinguinos aquí te lo esplico eido poniendo 10 en cada caga y e yenado cuatro cagas de pingüinos y luego e contado 4 cagas de 10 adios clara un beso asta el prosimo problema un beso clara.

Figura 11. Carta de Lucía explicando la estrategia de resolución.

Discusión y conclusiones

Los resultados muestran que las estrategias que utilizan los niños van evolucionando según el modelo CGI (Carpenter y otros, 1999), utilizando cada vez más el conteo de 10 en 10 y el conocimiento del valor posicional de las cifras de los números, en detrimento de estrategias de modelización directa en que se cuentan uno a uno los objetos. Este era uno de los objetivos principales del taller.

Los niños utilizan estrategias que resuelven los problemas y que tienen cierta semejanza con el desarrollo histórico de los sistemas de numeración (Gómez, 1988), ya que inicialmente se utilizaba un solo representante por cada elemento de una colección, al igual que los niños utilizan modelización directa. El agrupamiento simple se puede observar en las estrategias de los niños, al plantearles problemas de estructura multiplicativa de multiplicación y división agrupamiento con grupos de 10, y de hecho la mayoría de los niños combinan las unidades y las decenas (convertidas en unidades) mediante estrategias de "juntar todos", reflejando el carácter aditivo del sistema de numeración.

En el intento de comunicar por escrito las soluciones y las estrategias se ven reflejadas los avances y dificultades para comprender y expresar adecuadamente el valor posicional de las cifras.

Durante este curso, los niños han tenido clases de matemáticas todos los días, y sesiones del taller únicamente los miércoles por la tarde. Esto ha dado lugar a un taller de 25 sesiones, sobre un total de 32 semanas lectivas. Sabemos que es casi imposible, por fiestas u otros acontecimientos propios de la vida escolar, aprovechar todas las semanas del curso. Esta es una clara restricción con la que contamos en el desarrollo del taller. Una de las consecuencias de esta restricción es que la gama de problemas planteados es muy reducida, y no aspira a representar de forma completa ninguna categoría de problemas de estructura aditiva o multiplicativa. Uno de los objetivos que nos planteamos para el futuro, es que el tipo de trabajo matemático que se hace en el taller vaya incorporándose al trabajo cotidiano de la clase diaria de matemáticas. También aspiramos a agilizar los procedimientos del taller, para lograr realizar más de un problema por sesión. Es importante señalar en este punto que el taller de resolución de problemas tiene también una intención formativa para los maestros del centro, igual que en el modelo CGI de Carpenter y otros (1999) se aúnan la formación de maestros y el trabajo con los alumnos. Esperamos que, a medida que los maestros vayan dominando, cada vez con ayuda menor de los investigadores, la dinámica del taller, se sentirán cómodos para ir incorporando esta forma de trabajo en su aula, en la clase de matemáticas.

Referencias

Caballero, S. (2005). *Un estudio transversal y longitudinal sobre los conocimientos informales de las operaciones aritméticas básicas en niños de Educación Infantil* (Tesis doctoral). UCM, Madrid.

Carpenter, T. P., Fennema, E., Franke, M. L., Levi, L., y Empson, S. B. (1999). *Children's mathematics: Cognitively guided instruction*. Portsmouth: Heinemann.

De Castro, C., Pastor, C., Pina, L. C., Rojas, M. I., y Escorial, B. (2009). Iniciación al estudio de las matemáticas de las cantidades en la Educación Infantil. *Unión: Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 18*, 105-128.

De Castro, C. y Walsh, J. y Del Coso, E. y Salvador, C., González, V. y Escorial, B. (2009). "Dos de todo": El cuento chino de los problemas de comparación multiplicativa en la Educación Infantil. *Epsilon: Revista de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática "Thales", 73*(3), 33-42.

De Castro, C. y Escorial, B. (2007). Resolución de problemas aritméticos verbales en la Educación Infantil: Una experiencia de enfoque investigativo. *Indivisa, Boletín de Estudios e Investigación, Monografía IX*, pp. 23-47.

Jiménez, L. (2008). *La activación del conocimiento real en la resolución de problemas: un estudio evolutivo sobre los problemas no-rutinarios de adición* (Tesis doctoral). Editorial de la Universidad Complutense de Madrid, Madrid.

Ministerio de Educación y Ciencia (2007, 20 de julio). ORDEN ECI/2211/2007, de 12 de julio, por la que se establece el currículo y se regula la ordenación de la Educación primaria. *BOE, 173*, pp. 31487-31566.

Molina, M. (2006). *Desarrollo de pensamiento relacional y comprensión del signo igual por alumnos de tercero de educación primaria* (Tesis doctoral). Universidad de Granada, Granada.

Molina, M., Castro, E., Molina, J.L., y Castro, E. (2011). Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza. *Enseñanza de las Ciencias, 29*(1), 75-88.

Núñez, C., De Castro, C., Del Pozo, A., Mendoza, C. y Pastor, C. (2010). Inicio de una investigación de diseño sobre el desarrollo de competencias numéricas con niños de 4 años. En M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo y T. A. Sierra (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 463-474). Lleida: SEIEM.

OCDE (2004). *Informe PISA 2003: Aprender para el mundo del mañana*. Madrid: Santillana.

Puig, L., y Cerdán, F. (1995). *Problemas aritméticos escolares*. Madrid: Síntesis.

Rodríguez, P., Lago, O., Caballero, S., Dopico, C. y Jiménez, L. (2008). El desarrollo de las estrategias infantiles. Un estudio sobre el razonamiento aditivo y multiplicativo. *Anales de Psicología, 24*(2), 240-252.

Apéndice I: Libros utilizados en las sesiones

Bruno, P. (2003). *Cuento para contar mientras se come un huevo frito*. Pontevedra: Kalandraka.

Carle, E. (2011). *Diez patitos de goma*. Madrid: Kókinos.

Fromental, J.-L. (2007). *365 pingüinos*. Madrid: Kókinos.

Apéndice II: Problemas hasta la sesión 15 que no aparecen en la Tabla 1

Sesión 1: Al principio había 11 damas atrevidas, ¿Cuántas quedaban cuando se habían ido 6?

Sesión 2: Si había 11 damas atrevidas, y después se fueron algunas y quedaban 3 ¿Cuántas damas se habían ido?

Sesión 3: Si el gato tragón se comió un hombre, un burro, 5 pajaritos y 7 niñas. ¿Cuántos se comió en total?

Sesión 4: El gato tragón se comió 7 niñas. Si cada niña tiene 2 brazos, ¿Cuántos bracitos se comió el gato?

Sesión 5: Marcel y Tristán se comieron 18 buñuelos de crema. ¿Cuántos se comió cada uno?

Sesión 6: En el cumpleaños de Marcel había 3 globos. Si por la mañana había 15, ¿Cuántos habían explotado?

Sesión 9: Finn Herman cenó un jamón, dos pollos, tres filetes y veintiséis deliciosas salchichas. ¿Cuántas cosas tomó para cenar?

Sesión 10: Si Finn Herman tiene 38 dientes en la mandíbula superior y 30 en la inferior, ¿cuántos dientes tiene en total?

Sesión 13: Si en enero llegaron 31 pingüinos y en febrero vinieron otros 28, ¿cuántos pingüinos había al final de febrero?

Sesión 14: Cuando llegaron a 60 pingüinos, repartieron los pingüinos en 4 grupos iguales. ¿Cuántos pingüinos pusieron en cada grupo?